×q ×q ×q

1. $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}$ 等比数列

$$\begin{cases} a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_n = a_m \cdot q^{n-m} \\ \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m} \end{cases}$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 一定等比 ✓

$a_{n+1} = q \cdot a_n \Rightarrow \{a_n\}$ 一定等比 ✗

2. $\{a_n\}$ 等比 $\Leftrightarrow$ $c_n = a \cdot b^{cn+d}$ 一次函数. 且公比 b^c

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a \cdot b^{c(n+1)+d}}{a \cdot b^{cn+d}} = b^c = q$$

$a_n = 2^{2n-1}$ 公比 $= 4$

3. 单调性 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

① a_1 为正 $\begin{cases} q>1, \uparrow \\ 0<q<1 \downarrow \\ q<0 \text{ 正负交替} \end{cases}$ 无周期性

② a_1 为负 $\begin{cases} q>1 \downarrow \\ 0<q<1 \uparrow \\ q<0 \text{ 负正交替} \end{cases}$

等比数列的基本顶及性质

① $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$

$\{a_n\}$ 等比, $q \neq 1 \Leftrightarrow S_n = A \cdot q^n - A$

q^n 的系数与常数项是相反数

② S_n, $S_{2n}-S_n$, $S_{3n}-S_{2n}$, $\cdots$ 成等比 公比为 q^n

③ $\{a_n\}$ 等比, 共有 $2n$ 项. $\frac{S_{偶}}{S_{奇}} = q$

$\{a_n\}$ 等比, 共有 $2n-1$ 项. $\frac{S_{奇}-a_1}{S_{偶}} = q$

4. 性质. $m+n=p+q \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$

$\frac{a_m}{a_p} = q^{m-p}$

$\frac{a_q}{a_n} = q^{q-n}$

$\downarrow$

$\frac{a_n}{a_p} = \frac{a_q}{a_n}$

$m+n+p = r+s+t \Rightarrow a_m \cdot a_n \cdot a_p = a_r \cdot a_s \cdot a_t$

等比中项 $G^2 = ab$.

$a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2$

若 a_n 二等比:

$\{a_n\}$ 二等比 首 a_1^2 公比 q^2

$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = q^2$

$\{\sqrt{a_n}\}$ 等比 首 $\sqrt{a_1}$ 公比 $\sqrt{q}$.

$\{\frac{1}{a_n}\}$ 等比 首 $\frac{1}{a_1}$ 公比 $\frac{1}{q}$

$\{a_n \cdot a_{n+1}\}$ 首 $a_1 \cdot a_2$ 公比 q^2

$\{\ln a_n\}$ 等差. 公比 $\ln q$.

2^{a_n} 等比.

5. 等比数列前 n 项和. 错位相减

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \cdot q$

$(1-q)S_n = a_1 - a_n \cdot q$

当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

不知项数 不知末项

等比数列的证明

① $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

② $a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2$

第 15 讲：等比数列的性质拓展

题型一：等比数列的基本量及性质

1. (2019 全国Ⅰ) 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_4^2=a_6$, 则 $S_5=$ _____.

$a_4^2 = a_2 \cdot a_6 = a_6$. $\Rightarrow a_2 = 1$.

$q = 3$.

$S_5 = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}(1-3^5)}{-2} = \frac{\frac{1}{3}-3^4}{-2} = -\frac{1}{6}+\frac{3^4}{2}$

$a_4 = \frac{a_6}{a_4} = q^2$

2. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $3S_3=a_4-2$, $3S_2=a_3-2$, 则公比 $q=$ ___4.___.

①-②

$3a_3 = a_4 - a_3$.

$4a_3 = a_4$

$q = 4$.

3. (2017 江苏) 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数, 其前 n 项和为 S_n, 已知 $S_3=\frac{7}{4}$, $S_6=\frac{63}{4}$, 则 $a_8=$ ___32___. 先验证常数列

法一: $S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{7}{4}$

$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{63}{4}$ 作比

$\frac{1-q^6}{1-q^3} = q$.

$\frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^3} = 1+q^3 = q$.

$q = 2$. $a_1 = \frac{1}{4}$. $a_8 = 32$

$S_3 = \frac{7}{4}$

$S_6 - S_3 = \frac{56}{4} = a_4+a_5+a_6$. 比.

$= a_1 \cdot q^3 + a_2 q^3 + a_3 q^3$

$q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$.

4. (2017 全国Ⅲ) 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差不为 0. 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为 (A)

A. -24　　B. -3　　C. 3　　D. 8

法一 $a_3 \cdot a_6 = a_3^2$

$(1+d)(1+5d) = (1+2d)^2$

$5d^2+6d+1 = 4d^2+4d+1$

$d = -2$.

$S_6 = 6a_1 + \frac{6\times5}{2}(-2) = 6-30 = -24$

法二 $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_6}{a_3} = \frac{a_6-a_3}{a_3-a_2} = \frac{3d}{d} = 3$.

和比运算

$a_3 = 3a_2$

5. (2012 全国) 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_4+a_7=2$, $a_5a_6=-8$, 则 $a_1+a_{10}=$ (D)

A. 7　　B. 5　　C. -5　　D. -7

$a_4 \cdot a_7 = -8$.

韦达定理

$a_4 \cdot a_7$ 是 x^2-2x-8 的根.

$x_1 = -2$　$x_2 = 4$.

讨论

$a_1 + a_{10} = 1-8 = -7$.



高中课程资料微信：NSJ2026

6. 若等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2e^5$，则$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=$ _____.

法一 构造常数列 $a_1^2+a_1^2=2e^5$

$a_1^2=e^5$

$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=20\ln a_1=50.$

7. 设$f(n)=2+2^4+2^7+\cdots+2^{3n+10}(n\in N^*)$，则$f(n)=$ _____.

A. $\frac{2}{7}(8^n-1)$　　B. $\frac{2}{7}(8^{n+1}-1)$　　C. $\frac{2}{7}(8^{n+3}-1)$　　D. $\frac{2}{7}(8^{n+4}-1)$

8. 各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{10}=2$，$S_{30}=14$，则$S_{40}=$ _____.

S_{10}　　$S_{20}-S_{10}$　　$S_{30}-S_{20}$　　$S_{40}-S_{30}$

2　　$x-2$　　$14-x$　　16.

9. 已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_8-2S_4=6$，则$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$的最小值为 _____.

10. 在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1+a_2+\cdots+a_n=2^n-1$，则$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$等于（　　）

A. $(2^n-1)^2$　　B. $\frac{(2^n-1)^2}{3}$　　C. 4^n-1　　D. $\frac{4^n-1}{3}$

高中课程资料微信：NSJ2026

11. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_2=2$，$a_5=\frac{1}{4}$，则 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}$ 的值为（　　）

A. $16(1-4^{-n})$　　B. $16(1-2^{-n})$　　C. $\frac{32}{3}(1-4^{-n})$　　D. $\frac{32}{3}(1-2^{-n})$

题型二：等比数列的单调性

12. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，则“$a_1<a_2<a_3$”是“数列 $\{a_n\}$ 是递增数列”的（　　）

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，若数列 $\{2^{a_1a_n}\}$ 为递减数列，则（　　）

A. $d>0$　　B. $d<0$　　C. $a_1d>0$　　D. $a_1d<0$

14. (2016 全国Ⅰ) 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为 _____.

15. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，其前 n 项和为 S_n，前 n 项积为 T_n，并满足条件 $a_1>1$，$a_{2019}a_{2020}>1$，$\frac{a_{2019}-1}{a_{2020}-1}<0$，下列结论正确的是（AC）

A. $S_{2019}<S_{2020}$ ✓.　　B. $S_{2019}S_{2021}-1<0$ ✗.

C. T_{2019} 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大值 ✓.　　D. 数列 $\{T_n\}$ 无最大值 ✗

同号

$q>0$.

$0<q<1$

单调递减

$(a_{2019}-1)(a_{2020}-1)<0$

$a_{2019}>1$ 或 $a_{2020}<1$

T_{2019} 最大.

高中课程资料微信：NSJ2026

题型三：等比数列的证明

16. 定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$，如果对于任意给定的等比数列 $\{a_n\}$，$\{f(a_n)\}$ 仍是等比数列，则称 $f(x)$ 为“保等比数列函数”．现有定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的如下函数：①$f(x)=x^2$；②$f(x)=2^x$；③$f(x)=\sqrt{|x|}$；④$f(x)=\ln|x|$．则其中是”保等比数列函数”的序号为（　C　）

A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ②④

D

若 a_n 为比 $\Rightarrow$ a_n^2 为比

② a_n 为比 $\Rightarrow$ 2^{a_n} 为比 ×

$\downarrow$

为差数列

17. 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n+1}$，$b_n=\left|\dfrac{a_n+2}{a_n-1}\right|$，$n\in N^*$，则数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n=$ 2^{n+1} ．

$a_2=\dfrac{2}{a_1+1}=\dfrac{2}{3}$　　$b_1=\dfrac{a_1+2}{a_1-1}=4$．

$a_3=\dfrac{6}{5}$　　$b_2=\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{6}{3}}{\frac{1}{3}}=8$．

$b_3=\dfrac{\frac{6}{5}+\frac{10}{5}}{\frac{1}{5}}=16$．

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\left|\dfrac{a_{n+1}+2}{a_{n+1}-1}\right|}{\left|\dfrac{a_{n+2}}{a_{n-1}}\right|}=\frac{\dfrac{2}{a_{n+1}}+2}{\left|\dfrac{2}{a_{n+1}}-1\right|}=\frac{\left|\dfrac{2+2a_{n+2}}{2-a_{n-1}}\right|}{\left|\dfrac{a_{n+2}}{a_{n-1}}\right|}=\frac{|2a_n+4|}{a_n+2}=2.$$

高中课程资料微信：NSJ2026



课堂总结

高中课程资料微信：NSJ2026

作业

1. 一个由实数组成的等比数列，它的前 6 项和是前 3 项和的 9 倍，则此数列的公比为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

2. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列，其前 n 项和为 S_n，且 $9S_3=S_6$，则 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 5 项和为

A. $\frac{15}{8}$ 或 5　　B. $\frac{31}{16}$ 或 5　　C. $\frac{31}{16}$　　D. $\frac{15}{8}$

3. (2014 全国) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_4=2$，$a_5=5$，则数列 $\{\lg a_n\}$ 的前八项和等于（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

4. (2008 四川) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，足 $a_2=1$，则其前 3 项的和 S_3 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $[3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

高中课程资料微信：NSJ2026